

# Diseño de un Controlador PI para Sistemas Inestables con Retardo de Primer Orden

M. A. Quiroz J., O. Jiménez R., R. Vázquez M., M. A. Castillo G.  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Campus Culhuacán, I P N  
DF 04430, México

mquirozj0700@alumno.ipn.mx ojimenezr@ipn.mx, ruvazquez@ipn.mx, mcastillo@ipn.mx

**Resumen**—En este trabajo se diseña un controlador Proporcional Integral PI para controlar un sistema inestable con retardo de tiempo en la trayectoria directa a través de la estimación de la señal entre la planta y el retardo. El retardo se representa en forma racional con una aproximación de Padé la cual se lleva a la forma canónica observador generalizada para  $n$  estados.

**Palabras clave:** Realimentación, controlador PI, forma canónica observador.

## I. INTRODUCCION

Desde el siglo pasado, cuando aparecieron los controladores del tipo proporcional (P), Proporcional Integral (PI), Proporcional Derivativo (PD) y Proporcional Integral Derivativo (PID) se han aplicado a sistemas con retardo de tiempo, para sistemas estables e inestables con diferentes estructuras (Åström 1995, Majhi y Atherton 2000, Normey-Rico et al. 1997). De hecho, estos métodos pueden proporcionar un buen desempeño del sistema de control cuando el retardo del proceso es pequeño y la función de transferencia del sistema es estable, pero no es aceptable cuando el tiempo muerto del proceso es grande y la función de transferencia es inestable (Liu et al 2005, Xian y Yong-Sheng 2005). Una forma de estabilización de sistemas lineales de primer orden con retardo (E. Olvera et al. 2011) presentaron las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la estabilidad del sistema a lazo cerrado con el uso de un controlador Proporcional-Derivativo, pero este presenta error en estado estacionario.

La estrategia conocida como Predictor de Smith (SPC) (Smith, 1957) es una forma de predicción muy utilizada, por medio de un tipo de esquema observador a lazo abierto. Esta estrategia de compensación consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo a través de estructuras que intentan predecir los efectos de la entrada actual para una salida futura. La principal limitación del SPC original consiste en que el esquema de predicción no contiene un paso de estabilización, lo que lo restringe a aplicaciones de plantas a lazo abierto estables. Para resolver sistemas de primer orden inestables se han presentado distintas modificaciones de la estructura original del SPC.

Una alternativa para controlar sistemas con tiempo muerto es aplicar estrategias para sistemas lineales representados en forma racional. Estos métodos están compuestos por un observador y un controlador (B. del Muro et al. 2007). El observador juega un papel importante para predecir una

variable entre el sistema libre de retardo y el retardo. Con la predicción de esta variable se genera una entrada de control a la planta. Cuando se considera el caso en tiempo continuo el retardo puede ser aproximado a series de expansión de Taylor o Padé. El retardo es representado en forma racional (O. Jiménez et al. 2011) con una aproximación de Padé la cual se lleva a la forma canónica observador generalizada para  $n$  estados. A partir de esto, se diseña un estimador de estados en forma continua y con el uso de un controlador del tipo Proporcional Integral Derivativo (PID), se estabiliza un sistema inestable de primer orden con un retardo grande. Finalmente los resultados que presentan muestran la señal de salida del proceso tiene sobre impulsos del orden de 30% los cuales podrían ser no permitidos en el control de lazo cerrado.

Desde la perspectiva de control, los retardos son un caso desafiante que debe ser superado diseñando estrategias de control que propicien un comportamiento aceptable del sistema en lazo cerrado y por supuesto estable. Por ello, la idea de este trabajo es proporcionar una estrategia de control con un estimador de estado y un controlador PI para estabilizar sistemas de primer orden inestables con retardo en la trayectoria directa. El observador se determina a partir de una representación en variables de estado en la forma canónica observador.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma en la sección II, se representa al retardo como una función de Padé, se generaliza para orden  $n$  en la forma canónica observador y se integra con el modelo del proceso libre de retardo. En la sección III, se diseña un controlador PI con el Lugar Geométrico de las Raíces. También se diseña un observador para estimar la señal entre la planta y el retardo. Finalmente se aplica la metodología a un primer orden inestable con retardo grande en el lazo directo, se presentan simulaciones de la señal de salida y de variaciones nominales al retardo. En la sección IV, se dan conclusiones generales del trabajo.

## II. REPRESENTACIÓN EN VARIABLES DE ESTADO DEL RETARDO

En esta sección se obtiene un modelo matemático en forma racional para un retardo. Se parte de un sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo denotado como  $P(s)$ . Dado el modelo  $P(s) = G(s)e^{-\tau s}$ , donde  $G(s)$  representa al proceso libre de retardo. Una representación en variables de estado para  $G(s)$  puede obtenerse para el proceso  $P(s)$  haciendo  $\tau = 0$  (que representa al sistema sin el retardo) como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= A_l x_l(t) + B_l u(t). \\ w(t) &= C_l x_l(t) + D_l u(t). \end{aligned} \quad (1)$$

La forma general para las matrices de la representación (1)  $A_l = [a]$ ,  $B_l = [1]$ ,  $C_l = [k]$  y  $D_l = 0$

En general, una realización en espacio de estado en la forma canónica observador para el termino retardo puede ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rn} &= A_{rn} x_{rn}(t) + B_{rn} w(t). \\ y(t) &= C_{rn} x_{rn}(t) + D_{rn} w(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Donde los coeficientes de la ecuación previa (2) son definidos en forma general por

$$A_{rn} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$B_{rn} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 0 \\ 2a_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2a_n \end{bmatrix}.$$

$$C_{rn} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad D_{rn} = [(-1)^n].$$

Donde los coeficientes están dados por la siguiente expresión

$$a_{n-k} = \frac{(2n-k)}{k!} \frac{1}{(n-k)! \tau^{n-k}}. \quad (4)$$

La representación en espacio de estado (2) del termino retardo para una aproximación de orden  $n$ , y el proceso libre de retardo (1) puede ser integrada en una sola representación en variables de estado del sistema denotado por  $P(s)$  como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t). \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Los coeficientes de la representación en variables de estado (5) están dados como

$$A = \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ B_{rn} C_l & A_{rn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_l \\ B_{rn} D_l \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$C = [D_{rn} C_l \quad C_{rn}], \quad D = [D_{rn} D_l].$$

### III. DISEÑO DE UN ESTIMADOR CONTINUÓ USANDO UN CONTROLADOR PI.

El esquema de control que se propone para estabilizar a los sistemas lineales, invariantes en el tiempo que representan plantas inestables de primer orden con retardo, se muestra en la figura 1. Se estima la señal  $W(s)$  a partir de un estimador de estados, ya que no se tiene acceso a esta señal. El controlador PI se diseña en forma convencional por el método del lugar geométrico de las raíces, para satisfacer especificaciones en el tiempo.

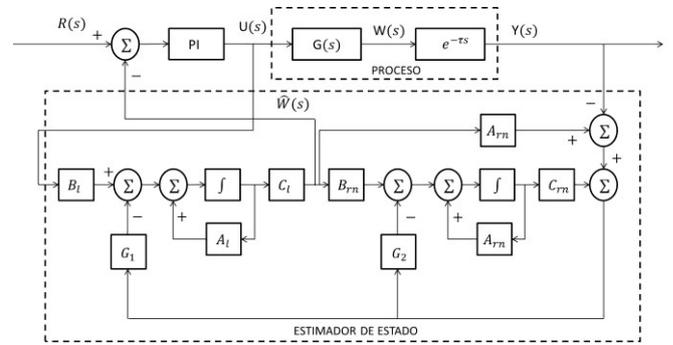


Figura 1. Esquema del estimador con un controlador PI

Como ejemplo considérese un sistema de primer orden inestable con retardo, con función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-1} e^{-s}. \quad (7)$$

Se diseña un controlador del tipo PI, en lazo cerrado bajo un esquema como el mostrado en la figura 1. La Función de Transferencia de un PI está dada por

$$PI = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{s + \frac{K_i}{K_p}}{s} \quad (8)$$

Para el diseño del controlador PI, se proponen especificaciones para el tiempo de tal forma que se desea un factor de amortiguamiento de 0.7, y un tiempo de establecimiento de 1 segundo, con dichas condiciones se calcula la frecuencia natural no amortiguada y la ubicación del punto deseado a través de la siguiente fórmula:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s} \quad (9)$$

$$s_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Al sustituir, obtenemos un  $\omega_n = 5.71$  y  $S_d = -3.997 + j4.07$ . Tomando en cuenta las especificaciones de diseño se parte a localizar los polos y ceros de lazo abierto y el punto deseado  $S_d$  como en la figura 2

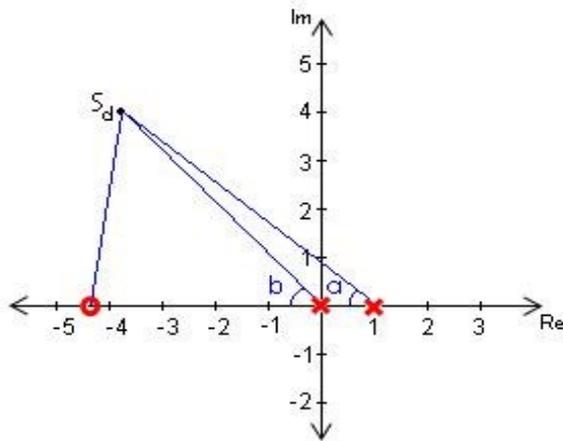


Figura 2. Ubicación de la dinámica

El ángulo que aporta cada singularidad se determina de la condición de ángulo como se muestra a continuación

$$\left| \frac{s+a}{s(s-1)} \right| = \left| \frac{s+a}{s} \right| - \left| \frac{s}{s-1} \right| = -180$$

Continuando

$$\begin{aligned} |s+a| &= -180 + |s| + |s-1| \\ |s+a| &= -180 + 134.42 + 140.78 \end{aligned}$$

De donde se determina el ángulo a compensar

$$\angle s+a = 95.2^\circ$$

Donde

$$a = \frac{K_i}{K_p}$$

Se traza una recta paralela al eje real que pase por el punto deseado y en la intersección de  $S_d$  se proyecta una línea con ángulo de inclinación igual a  $95.2^\circ$ , y el cruce que se tenga con el eje real indica la posición del cero de la función de transferencia del controlador PI. Haciendo un proceso sencillo de trigonometría se determina la posición del cero, por lo tanto la función de transferencia para el PI queda de la siguiente forma:

$$PI = \frac{s+4.36}{s}$$

De donde se obtuvieron las ganancias  $\{K_p = 8.99, K_i = 39.45\}$ . Con fines de comparación se diseñó otro controlador del tipo PI con ganancias  $\{K_p = 9, K_i = 20\}$ , que cumplen con especificaciones para el diseño, bajo la misma estrategia de compensación

El diseño del estimador se hace a partir de una aproximación de Padé de orden  $n = 4$  del término retardo, con la finalidad de estimar la variable de estado  $W(s)$  del sistema antes del retardo de tiempo, debido a que esta señal no se puede medir. El observador de estado estima las variables de estado con base en la medición de las variables de salida y de control.

Se diseña el estimador de estado completo y a partir del vector de estado estimado  $\hat{x}(t)$  se obtendrá la función del estado estimada  $\hat{w}(t) = [0 \ C_i]\hat{x}(t) = [0 \ 1]\hat{x}(t)$ .

El vector de ganancia  $G = [G_1 \ G_2]^T$  del estimador de estado se determina a partir de un modelo matemático continuo, que consta de dos partes; una que proviene directamente de la parte libre del retardo y la otra del término retardo. El cálculo de las ganancias para el reconstructor puede hacerse calculando el vector  $G$  tal que las raíces de la ecuación característica  $\det(sI - (A_{rl4} - GC_{lr4})) = 0$  estén ubicadas en  $\{-1, -2, -2, -2, -2\}$ . El vector resultante para esta ubicación de polos de lazo cerrado  $G = [0.16 \ -10.16 \ -134.92 \ -768.05 \ -1424.1]^T$ . El comportamiento del sistema bajo el esquema de la figura 1 se muestra en la figura 3.

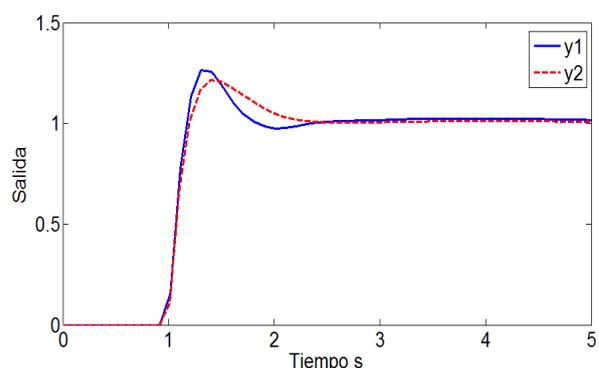


Figura 3. Respuesta del controlador PI con distintas ganancias  $K_p$  y  $K_i$

En la figura 3 se muestran las respuestas de dos controladores PI, para la respuesta  $y_1$  se tiene un tiempo de establecimiento de 1 segundo y un máximo sobre impulso del 25% con respecto a la referencia, mientras que para  $y_2$  se tiene un tiempo de establecimiento de 1.5 segundos y un sobre impulso del 18% sobre el nivel de la

referencia, de tal forma que los resultados expuestos cumplen con las especificaciones de diseño.

La figura 4 muestra el error cuadrático medio de estimación con cada uno de los controladores PI propuestos bajo el esquema de control predictivo de la figura 1.

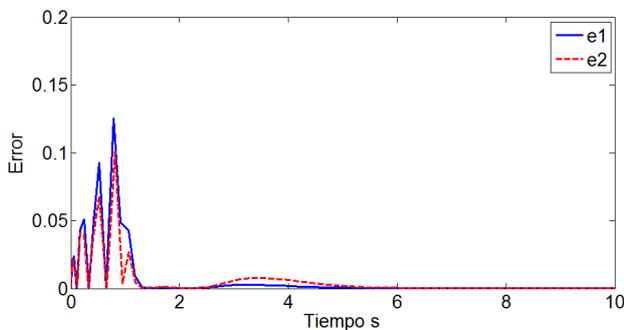


Figura 4. Respuesta de los errores cuadráticos medios.

Es posible visualizar que la respuesta del error  $e_2$  tiene un impulso en magnitud por debajo de los que tiene la respuesta  $e_1$ , lo que da pauta a concluir que el error de estimación en la respuesta  $e_2$  es menor con respecto a  $e_1$ . Sin embargo el tiempo en llegar a cero es de 5 segundos para los dos errores de estimación.

En la figura 5 se muestra una estructura de control con dos grados libertad, una  $k_1$  ubicada en el lazo directo y una  $k_2$  en la realimentación del estado estimado  $\hat{W}(s)$ , siempre bajo la relación  $k_2 = k_1 + 1$ , que tiene como propósito llevar el error de estado estacionario a cero. Bajo este criterio las ganancias resultantes son  $\{k_1 = 4, k_2 = 5\}$ .

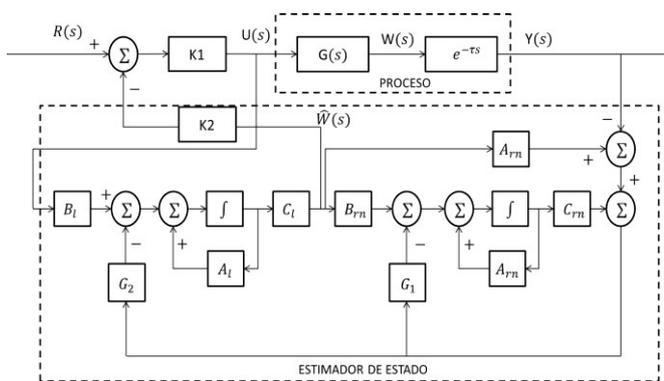


Figura 5. Esquema de un control proporcional con dos grados de libertad partir de un estimador asintótico continuo

En la figura 6 se muestra la respuesta de los dos esquemas propuestos en la figura 1 y 5. Las ganancias del PI usadas para comparar su desempeño contra el controlador con dos

grados de libertad son  $\{K_p = 9, K_i = 20\}$ . El diseño del observador para ambas esquemas, se hace a partir de una aproximación de Padé de orden  $n = 4$ .

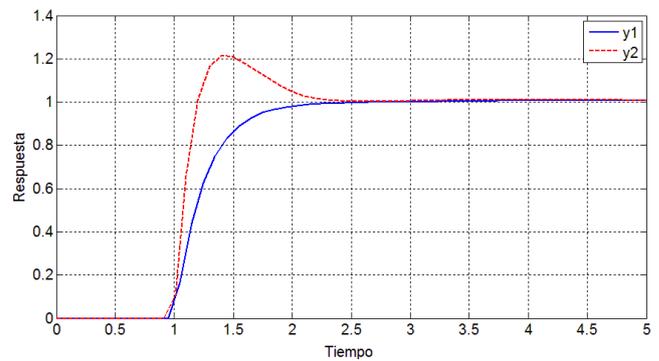


Figura 6. Respuesta de los esquemas de control propuestos con el estimador analógico

En forma comparativa se observa que la respuesta  $y_2$  tiene un máximo sobre impulso del 20% que representa la respuesta con el controlador PI mientras que en ese mismo instante  $y_1$  aún no ha rebasado la referencia. Por otra parte el tiempo de establecimiento para ambas esquemas es de 2.5 segundos.

En la figura 7 se muestran las respuestas de ambas metodologías propuestas, haciendo una variación del 12% al valor nominal del retardo de tiempo.

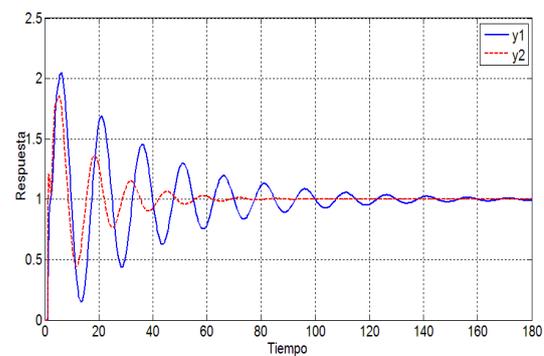


Figura 7. Respuesta de los esquemas de control propuestos con  $\tau = 1.12$  segundos.

La respuesta  $y_2$  correspondiente a la estructura del PI, se observa que esta es mejor comparada con  $y_1$  la cual es obtenida a partir del controlador proporcional con dos grados de libertad, ante variaciones del valor nominal de retardo. En la respuesta  $y_1$ , se tienen sobre impulsos hasta de un 100% por encima de la referencia, mientras que para la respuesta  $y_2$  son de apenas del 80%. Por otro lado el tiempo de establecimiento de la respuesta  $y_1$ , es del doble con respecto a  $y_2$ .

#### IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se diseñó un controlador Proporcional-Integral (PI), con una estructura de control en la que se incluye un estimador continuo asintótico. Se usaron ejemplos en simulación digital para evaluar el desempeño de la estrategia propuesta. Se compara con una estructura de dos grados de libertad. Teniendo como resultado un mejor comportamiento en el tiempo del sistema con un controlador PI cuando se incluyen variaciones del retardo nominal. Los resultados que presenta esta estructura satisfacen las especificaciones de diseño, la respuesta del sistema presenta un sobre impulso que corresponde al establecido.

#### V. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo institucional otorgado a través de la COFAA-IPNy los recursos recibidos por el Programa Institucional de Formación de Investigadores del IPN. Mario Alan Quiroz Juárez agradece la beca otorgada por CONACyT para sus estudios de maestría. Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto ICYTDF 270/2010 a quien se le agradece especialmente.

#### REFERENCIAS

- Åström, K. J. y Häng, C. C. Lim, B. C. A New Smith Predictor for Controlling a Process with an Integrator and Long xDead-Time. IEE Trans. Auto. Control 1994, 39 (2), 343.
- Åström, K. J. y Häng, T. PID Controllers, theory, design and tuning. 2nd Edition; ISA Publishers: Research Triangle Park, NC, 1995.
- B. del Muro Cuéllar, M. Velasco-Villa, J. J. Álvarez- Ramírez, F. Márquez- Rubio y O. Jiménez-Ramírez. Control Scheme Based on Internal Prediction for Unstable Linear Time-Delay Systems. 8th INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMICS AND CONTROL OF PROCESS SYSTEMS, DICOPS 2007, (june 6-8), Cancun, Quintana Roo.
- B. del Muro Cuéllar, Martín Velasco-Villa, Omar Jiménez-Ramírez, Guillermo Fernández-Anaya y José Álvarez-Ramírez. Observer-based Smith Prediction Scheme for Unstable Plus Time Delay Proceses. Ind. Eng. Chem. Res. 2007.14(46), pp 4906-4913.
- E. Olvera, J.F. Marquez, B. del Muro, J.C. Sanchez, y G.I. Duchon. Estabilizacion de sistemas de primer orden inestables con retardo utilizando un controlador PD. (octubre 2011 ) AMCA 2011.
- Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, y S.P. Bhattacharyya (2004). PID Controllers for Time-Delay Systems, Birkhäuser. USA, 82-85.
- Lee, Y.H., y Lee, J.S. PID controllers tuning for integrating and unstable processes with time delay. Chem. Eng. Sci., 2000, 55, pp. 3481-3493.
- Leonid, M., y Natalya, R. Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor-based structure. Automatica, 2003, 39, pp. 1747-1754.
- Liu, T., Cai, Y. Z., Gu, D. Y., y Zhang. New modified Smith predictor scheme for integrating and unstable processes with time delay. IEE Proc-Control Theory Appl., 2005, 152(2), pp. 238-246.
- Liu, T., Zhang, W. y Gu, D. Analytical Design of two-degree-of-freedom Control Scheme for Open-loop Unstable Processes with Time Delay. J. Process Control 2005, 15 (5), 559.
- Majhi, S. y Atherton D. P. Modified Smith Predictor and Controller for Processes with Time Delay. IEE Proc. CTA 1999, 146 (5), 359.
- Majhi, S. y Atherton D. P. Obtaining Controller Parameters for a New Smith Predictor Using Autotuning. Automatica 2000, 36, 1651.
- Matausek, M.R., y Micic, A.D. A the modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead time. IEEE Trans. Autom. Control, 1996, 41, (8), PP. 1199-1203.
- Normey-Rico J. E., Bordon C. y Camacho E.F. Improving the

- Robustness of Dead Time Compensating PI Controllers. Control Eng. Pract. 1997, 5, 801.
- O. Jimenez-Ramirez, M. A. Quiroz-Juarez, R. Vazquez-Medina, Observer Generalized Representation to Unstable Delayed Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering, Volume 132, Informatics in Control, Automation and Robotics (Springer), December 2011.
- O. Jimenez R., M. A. Quiroz J., M. A. Mondragon G., R. Vazquez M., Representacion Canonica en Variables de Estado Observador para Sistemas con Retardo de Tiempo. (octubre 2011 ) AMCA 2011.
- Palmer, Z. J., Time delay compensation-Smith predictor and its Modifications. In S. Levine, (Ed.), The control handbook 1980 (pp. 224-237). Boca Raton, FL: CRC Press.
- S. J. Mason. Feedback Theory-Some Properties of Signal Flow Graphs. Proc. IRE Vol. 41, No. 9, 1144-1156, Sept. 1953.
- T. Furukawa y E. Shimemura. Predictive control for systems with time Delay. Int. J. Control, 1983, 37(2), pp. 399-412.
- Wang, Y.G., y Cai, W.J. Advanced proportional-integral-derivative tuning for integrating and unstable processes with gain and phase margin specifications. Ind. Eng. Chem. Res, 2002, 41, (12), pp. 2910-2914.
- Xian, L., y Yong-Sheng Y. A double two-degree-of-freedom control scheme for improved control of unstable delay processes. Journal of Process Control, 2005, 15, pp. 605-614.
- Yang, X. P., Wang Q.-G., Hang C. C. y Lin C. IMC-Based Control System Design for Unstable Processes. Ind. Eng. Chem. Res. 2002, 41, 4288.